

DOI: 10.7652/xjtuxb201701005

高精度中心-WENO 混合格式在可压缩各向同性湍流大涡模拟中的应用

李震, 琚亚平, 张楚华

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为提高可压缩湍流大涡模拟的格式精度和分辨率,通过引入当地压力脉动的感应因子和格式加权函数的取值界限,发展了一种数值耗散自适应可控的近似6阶中心-WENO(加权本质无振荡)混合格式,采用傅里叶法对离散格式数学特性进行了理论分析,并对一维激波/密度脉动干涉问题和三维可压缩各向同性湍流大涡模拟问题进行了计算。结果表明:近似6阶中心-WENO混合格式相比于5阶-WENO格式具有更小的耗散误差,且对激波和物理脉动均具有较高的分辨率;基于所发展的中心-WENO混合格式的大涡模拟计算结果与已有的直接数值模拟结果符合较好,且能够成功捕捉 $-5/3$ 幂律能谱特性曲线;该格式标定了适合于可压缩流动大涡模拟的格式加权函数界限数值,为流体机械内部可压缩湍流的高精度大涡模拟研究奠定了算法基础。

关键词: 大涡模拟;可压缩流动;各向同性湍流;WENO;混合格式

中图分类号: O35 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)01-0025-06

High Accuracy Central-WENO Scheme for Large Eddy Simulations of Compressible Isotropic Turbulence

LI Zhen, JU Yaping, ZHANG Chuhua

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Aiming at high accuracy and high resolution computation for large eddy simulation of compressible turbulence, a quasi-6th order central-WENO (weighted essentially non-oscillatory) hybrid scheme with adaptively controlled numerical dissipation is developed by introducing a local pressure gradient sensor and the upper and lower bounds of the weighting function. The mathematical characteristics of the developed hybrid scheme are theoretically analyzed with Fourier method. The 1D shock/density wave interaction problem and the 3D large eddy simulation of compressible isotropic turbulence are numerically analyzed to verify the validity and effectiveness of the scheme. The results show that the quasi-6th order central-WENO hybrid scheme has lower numerical dissipative error than the 5th order WENO scheme and can hold the high resolution for both the discontinuities and physical fluctuations in the flow fields. The decay curves of the turbulent statistics obtained by large eddy simulation with the central-WENO hybrid scheme coincide well with the available direct numerical simulation, and the $-5/3$ power law of the theoretical energy spectrum is successfully captured. The specific bounds of the weighting

收稿日期: 2016-06-22。 作者简介: 李震(1990—),男,博士生;琚亚平(通信作者),女,副教授。 基金项目: 国家重点基础研究发展计划资助项目(2016YFB0200901);国家自然科学基金资助项目(51406148);教育部重大科技基础设施培育计划资助项目。

网络出版时间: 2016-10-18

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20161018.1523.014.html>

function applicable to the large eddy simulation of compressible flow are calibrated. This work lays a solid algorithm foundation for high accuracy large eddy simulation of compressible turbulence in fluid machinery.

Keywords: large eddy simulation; compressible flow; isotropic turbulence; WENO; hybrid scheme

高速流体机械内部湍流是典型的多尺度黏性流动,大涡模拟(LES)旨在计算成本可控的前提下实现对这类复杂流动的高保真预测,为此,须发展在宽波数范围内具有低耗散特性且能适用于可压缩流动的空间离散格式。Jiang 等基于将不同插值模版加权组合的思想,在 r 阶 ENO 格式基础上发展出 $r+1$ 阶 WENO(加权本质无振荡)格式^[1]。该格式作为一种偏置迎风类格式,对激波结构具有高分辨率,但在湍流 LES 中依然表现出过大的数值耗散。Martin 等构造对称模版进行插值,发展出了高精度 WENO-SYM 格式^[2],但是在结合低耗散的对流通量分裂方法进行计算时,该格式的稳定性较差。Kim 等通过将 6 阶中心格式和经衰减后的 5 阶 WENO 格式附加耗散项进行叠加,提出了近似 6 阶精度的中心-WENO 混合格式^[3],为构造低耗散的高激波分辨率格式提供了新思路。斯坦福大学湍流研究中心经过近 10 年的算法研究,预测该类混合格式将成为可压缩湍流 LES 和直接数值模拟(DNS)的标准算法^[4]。

各向同性湍流是验证高精度算法的经典问题,对其数值计算得到的湍流统计量衰减曲线及能谱特性可作为数值求解格式及 LES 亚格子应力模型的验证指标。早期的相关研究主要针对不可压缩湍流,Samtaney 等使用基于高阶紧致格式的有限差分方法完成了初始湍流马赫数 Ma_i 为 0.1~0.5、Taylor 微尺度雷诺数 Re_λ 为 50~200 的可压缩各向同性湍流 DNS^[5]。国内学者曾展开相关研究^[6-7],在可压缩各向同性湍流 LES 方面,亦有诸多学者取得研究成果^[8-9]。

本文基于 Kim 等的思想^[3],构造出具有近似 6 阶精度的中心-WENO 混合格式,为实现对其数值耗散的自适应控制,引入流场当地压力梯度感受因子,以计算附加耗散项的加权函数,并为其设定上下限 f_{su} 和 f_{sl} 来控制数值耗散的取值范围。采用 Fourier 法对 5 阶 WENO 格式、6 阶中心格式以及本文所发展的中心-WENO 混合格式的精度进行了理论分析,对比了其在宽波数范围内的频散及耗散特性,并对一维激波/密度脉动干涉问题进行模拟,以验证

求解格式对流场间断及物理脉动的捕捉能力。在此基础上,分别使用 WENO 格式、 f_{sl} 取不同数值的中心-WENO 格式以及 6 阶中心格式对初始 Ma_i 为 0.4 的可压缩各向同性衰减湍流进行 LES,并以得到的能谱幂次为评价指标,确定了适于可压缩各向同性湍流 LES 的 f_{sl} 取值。本文工作可为高速流体机械内部复杂可压缩湍流的高保真预测奠定算法基础。

1 控制方程

控制方程采用无量纲的 N-S 方程组,即

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_c}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}_v}{\partial z} \right) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{Q}$ 为守恒矢变量; $\mathbf{F}_c$ 、 $\mathbf{G}_c$ 、 $\mathbf{H}_c$ 分别为 x 、 y 、 z 方向的无黏矢通量; $\mathbf{F}_v$ 、 $\mathbf{G}_v$ 、 $\mathbf{H}_v$ 为黏性矢通量,相应表达式详见文献[10]; Re 为雷诺数。黏性通量中的流体分子黏性系数由 Sutherland 公式得到,流体满足理想气体状态方程

$$p = \rho RT \quad (2)$$

式中: p 为流体静压; ρ 为密度; R 为气体常数; T 为温度。本文使用的变量均为无量纲化的量。

以当地网格尺度对控制方程进行 Favre 过滤,由此产生的亚格子应力使用壁面自适应当地涡黏(WALE)模型^[11]进行模化。

2 数值方法

2.1 方程离散方法

采用时间推进法及空间有限体积法来离散控制方程,分别使用 Jiang 等提出的 5 阶 WENO 格式(简记为 WENO5)^[1]和本文改进的近似 6 阶中心-WENO 混合格式(简记为 CWENO6)来重构网格界面两侧原始变量 $q_{i+1/2}^l$ 与 $q_{i+1/2}^r$,进而由 AUSM+up 格式^[12]计算无黏数值通量,并将上述求解格式的计算结果与 6 阶中心格式(简记为 Central6)进行对比。时间离散格式使用双时间步法,物理时间步推进方法为二阶隐式格式,虚拟时间步以预估-校正 LU-SGS 格式进行迭代。

2.2 中心-WENO 混合格式

Jiang 等提出的 WENO5 格式为通量插值形式^[1],本文使用原始变量重构形式,以网格界面左侧变量为例的构造方法为

$$q_{i+1/2}^1 = \omega_0^+ q_{i+1/2}^{l(0)} + \omega_1^+ q_{i+1/2}^{l(1)} + \omega_2^+ q_{i+1/2}^{l(2)} \quad (3)$$

式中: $q_{i+1/2}^{l(k)}$ 为插值模版; ω_k^+ 为对应权值。相应表达式如下

$$\left. \begin{aligned} q_{i+1/2}^{l(0)} &= \frac{1}{3}q_{i-2} - \frac{7}{6}q_{i-1} + \frac{11}{6}q_i \\ q_{i+1/2}^{l(1)} &= -\frac{1}{6}q_{i-1} + \frac{5}{6}q_i + \frac{1}{3}q_{i+1} \\ q_{i+1/2}^{l(2)} &= \frac{1}{3}q_i + \frac{5}{6}q_{i+1} - \frac{1}{6}q_{i+2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\omega_k^+ = \frac{\alpha_k^+}{\sum_{k=0}^2 \alpha_k^+}, \quad k = 0, 1, 2 \quad (5)$$

$$\alpha_k^+ = \frac{C_k}{(\epsilon + S_k^+)^2} \quad (6)$$

式中: ϵ 为小值; C_k 取常数, $C_0=0.1$, $C_1=0.6$, $C_2=0.3$; S_k^+ 为光滑指示器,表征模版的光滑程度,表达式为

$$\left. \begin{aligned} S_0^+ &= \frac{13}{12}(q_{i-2} - 2q_{i-1} + q_i)^2 + \frac{1}{4}(q_{i-2} - 4q_{i-1} + 3q_i)^2 \\ S_1^+ &= \frac{13}{12}(q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(q_{i-1} - q_{i+1})^2 \\ S_2^+ &= \frac{13}{12}(q_i - 2q_{i+1} + q_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3q_i - 4q_{i+1} + q_{i+2})^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

网格界面右侧变量 $q_{i+1/2}^r$ 的重构形式与左侧类似,插值模版中各基元的角标和系数与之对称。

将式(3)分解为 Central6 格式来重构表达式 $q_{i+1/2}^{\text{cen6}}$ 和附加耗散项 $\hat{q}_{i+1/2}^{1,d}$, 则有

$$q_{i+1/2}^1 = q_{i+1/2}^{\text{cen6}} + \hat{q}_{i+1/2}^{1,d} \quad (8)$$

$$q_{i+1/2}^{\text{cen6}} = \frac{1}{60}(q_{i-2} - 8q_{i-1} + 37q_i + 37q_{i+1} - 8q_{i+2} + q_{i+3}) \quad (9)$$

$\hat{q}_{i+1/2}^{1,d}$ 亦即由 WENO5 格式余项主导项构成的附加耗散项,表达式为

$$\hat{q}_{i+1/2}^{1,d} = \left(\frac{\omega_0^+}{3} - \frac{1}{60}\right)q_{i-1/2}''' + \left(\frac{\omega_2^+}{6} - \frac{5}{60}\right)q_{i+1/2}''' + \frac{1}{60}q_{i+3/2}''' \quad (10)$$

式中: $q_{i+1/2}'''$ 为 3 阶导数的离散表达式

$$q_{i+1/2}''' = q_{i-1} - 3q_i + 3q_{i+1} - q_{i+2} \quad (11)$$

Kim 等引入加权函数 $\sigma^{[3]}$, 将式(8)变为

$$q_{i+1/2}^1 = q_{i+1/2}^{\text{cen6}} + \sigma \hat{q}_{i+1/2}^{1,d}, \quad \sigma \in [0, 1] \quad (12)$$

即得到 CWENO6 格式的重构形式。当 $\sigma=1$ 时,格式蜕化为 WENO5;当 $\sigma=0$ 时,格式即为 Central6。

2.3 附加耗散项加权函数 σ 的计算方法

为实现对混合格式数值耗散的自适应控制,本文通过引入流场当地压力梯度感受因子 $\phi^{[13]}$ 计算 σ , 即

$$\sigma = \min(\max(\phi_i, \phi_{i+1}, f_{sl}), f_{su}), \quad \sigma \in [f_{sl}, f_{su}] \quad (13)$$

式中: f_{sl} 与 f_{su} 为常数,是为 σ 设定的上下界; ϕ_i 表达式为

$$\phi_i = \frac{|p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}|}{|p_{i+1} + 2p_i + p_{i-1}| + \epsilon} \quad (14)$$

其中 ϵ 为小值,取 10^{-6} 。

在流场光滑区域, ϕ_i 趋近于 0, σ 数值即为 f_{sl} ;当 f_{sl} 取值很小时,格式具有低耗散特性;在间断附近, ϕ_i 较大, σ 数值被限制为 f_{su} ,格式保留足够耗散以抑制非物理振荡。本文中, f_{sl} 分别取 0.02 和 0.1, f_{su} 取 1.0, 即令 CWENO6 的最大数值耗散与 WENO5 相同。

2.4 空间离散格式误差分析

采用 Fourier 精度分析法分析空间离散格式对线化无黏 Burgers 方程的逼近精度,所得到的修正波数的虚部与实部分别表征格式的频散与耗散特性。本节中, CWENO6 的加权函数 σ 分别取常数 0.1 和 0.02, 对应于下节 f_{sl} 的数值。图 1 为未引入光滑指示器(令 $S_k^+=1$)时各求解格式的修正波数。可以看出:各求解格式修正波数虚部相同,即具有相同频散误差,在波数约为 1.3 之后逐渐偏离准确解; Central6 修正波数实部与准确解相同,即耗散误差为 0; WENO5 在高波数区存在较大耗散误差; CWENO6 耗散误差与 σ 近似线性相关, $\sigma=0.02$ 时的误差特性与 Central6 相近。

图 2 为引入光滑指示器 S_k^+ (Central6 除外)后各求解格式的修正波数。可以看出: WENO5 在高波数区的频散误差相比于 Central6 有所增加, CWENO6 ($\sigma=0.02$) 的频散则更接近于 Central6; 耗散误差在 S_k^+ 影响下的变化趋势与频散类似,即在较高波数区略有所增加。

2.5 空间离散格式的一维验证算例

使用各空间离散格式模拟 Shu 等的一维激波/密度脉动干涉算例^[14], 以考察其对间断及物理脉动的预测能力。该问题的控制方程为

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad -5 \leq x \leq 5$$

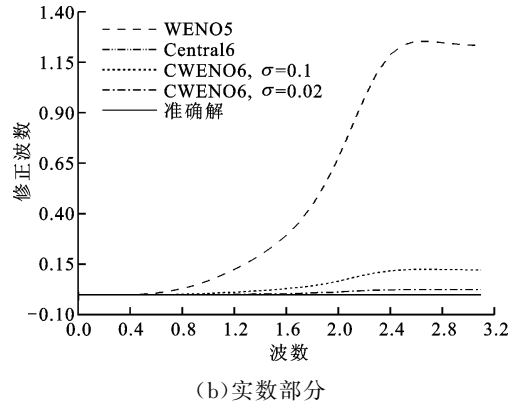
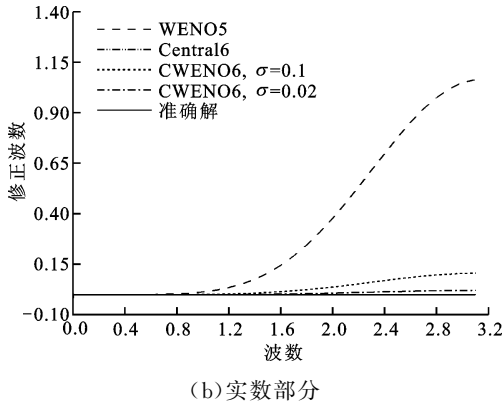
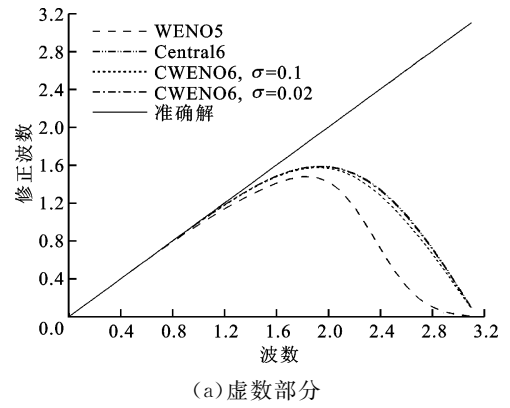
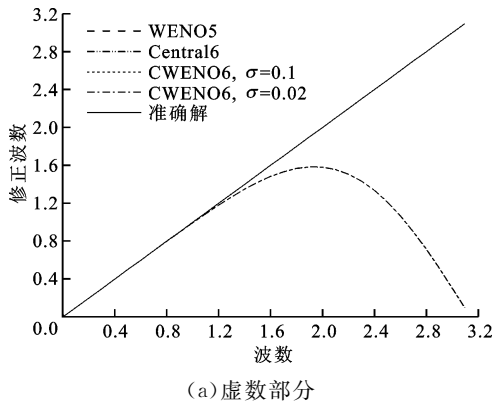


图1 未引入光滑指示器时各求解格式的修正波数

图2 引入光滑指示器后各求解格式的修正波数

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中: E 为流体总能。给定初始条件

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}_l = \begin{bmatrix} 3.857 \ 143 \\ 2.629 \ 369 \\ 10.333 \ 33 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 1 + 0.2\sin(5x) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

并以 $x = -4$ 为左右侧分界点。在该算例中,时间推进方法采用 3 阶 Runge-Kutta 格式,CFL 数取 0.5,计算推进至 $t = 1.8$,采用的网格数为 201。

图 3 为不同空间重构格式计算所得的密度分布与基准解的对比结果。可以看出:WENO5 和 CWENO6 均能够较好地捕捉 $x = 2.4$ 处的间断及 $x = 0.5$ 左侧的密度波动,但在该网格数下 WENO5 难以正确预测 $0.5 < x \leq 2.4$ 范围内的密度分布,且得到的脉动幅值明显偏小;CWENO6 能够得到与基准解符合较好的波形,幅值总体略微偏小,且 $f_{\sigma 1}$ 取 0.02 时的 CWENO6 计算所得脉动幅值相比于 $f_{\sigma 1} = 0.1$ 更接近基准结果;Central6 未能成功求解该问题。该算例计算结果表明,CWENO6 对流场间断及脉动具有较强的分辨率。

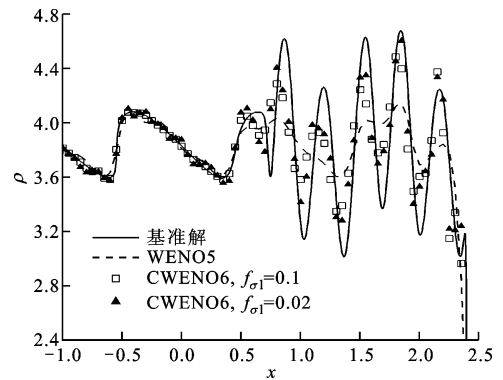


图3 一维密度分布

3 可压缩各向同性湍流 LES

3.1 计算模型与定解条件

考虑可压缩各向同性衰减湍流,计算域取边长 L 为 2π 的立方体,网格单元数为 64^3 ,边界均设为周期性边界。取初始 Ma_t 为 0.4, Taylor 尺度雷诺数 Re_λ 为 153,该取值与文献[5]中的算例 D11 相同, Ma_t 和 Re_λ 的定义如下

$$Ma_t = \frac{\langle u_i u_i \rangle^{1/2}}{\langle c \rangle} \quad (17)$$

$$Re_\lambda = \frac{u' \lambda \langle \rho \rangle}{\langle \mu \rangle} \quad (18)$$

$$\lambda^2 = \frac{u'^2}{\langle (\partial u_1 / \partial x_1)^2 \rangle} \quad (19)$$

$$u' = \langle u_i u_i / 3 \rangle^{1/2} \quad (20)$$

式中: $\langle \rangle$ 表示体积平均。

设定初始速度场满足能谱

$$E(k) = Ak^4 \exp(-2k^2/k_0^2) \quad (21)$$

式中: k 为波数; k_0 为峰值波数,本文取 6。通过调整 A 可使初始 Ma_t 和 Re_λ 等于预设值。初始时刻热力参数 p 、 T 、 ρ 为均匀值,为使速度场满足无散度条件,在谱空间将速度 $\hat{u}(k)$ 分解为螺旋分量 $\hat{u}_s(k)$ 和膨胀分量 $\hat{u}_d(k)$,则有

$$\hat{u}(k) = \hat{u}_s(k) + \hat{u}_d(k) \quad (22)$$

$$\hat{u}_s(k) = \hat{u}(k) - \frac{k \cdot \hat{u}(k)}{|k|^2} k \quad (23)$$

$$\hat{u}_d(k) = \hat{u}(k) - \hat{u}_s(k) \quad (24)$$

并令初始 $\hat{u}_d(k) = 0$ 。

3.2 计算结果及分析

将不同离散格式所得的 Ma_t (见图 4) 和湍动能

$E_K = \frac{1}{2} \langle \rho u_i u_i \rangle$ (见图 5) 随时间变化的曲线与 Samtaney 等的 DNS 结果^[5] 进行对比,将时间 t 和 E_K 分别以初始时刻大涡翻转时间 τ 和初始时刻湍动能做归一化处理。 τ 表达式为

$$\tau = u' / L_1 \quad (25)$$

式中: L_1 为积分尺度

$$L_1 = \frac{3\pi}{4} \frac{\int_0^\infty [E(k)/k] dk}{\int_0^\infty E(k) dk} \quad (26)$$

值得注意的是,本文 LES 所得湍动能为可解尺度湍动能。可以看出:由于耗散过大,WENO5 所得 Ma_t 在初始阶段衰减过快;当采用 $f_{\sigma 1} = 0.1$ 的 CWENO6 时, Ma_t 衰减过快现象得到显著改善,但依然与 DNS 结果存在较大差别;调整 $f_{\sigma 1}$ 至 0.02, Ma_t 变化曲线更接近于 DNS 结果,只是在 $t/\tau < 2.8$

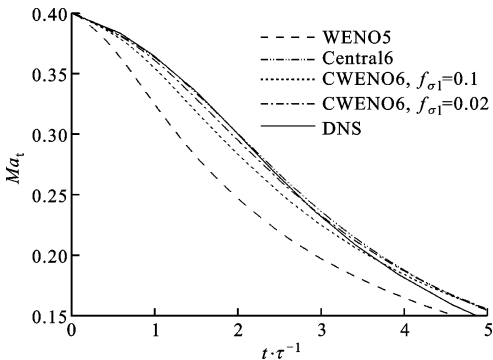


图 4 Ma_t 变化曲线

阶段衰减略快于 DNS 结果;Central6 所得 Ma_t 与 DNS 结果符合较好;各求解格式计算得到的 Ma_t 在流场演化末期的衰减速度均略小于 DNS 结果。 E_K 变化趋势与 Ma_t 相近。

图 6 为三维谱空间的球壳积分能谱。结果表明:由于耗散过大,WENO5 未能成功捕捉到明显的惯性子区; $f_{\sigma 1}$ 取 0.1 时,CWENO6 所得到的湍能谱曲线依然呈现出明显过大的耗散;CWENO6 的 $f_{\sigma 1}$ 取 0.02 时,所得能谱曲线与理论 $-5/3$ 幂律相符较好,惯性子区被成功捕捉;由于存在频散误差导致非物理波动,所以 Central6 所得能谱在高波数区呈现出耗散不足现象。

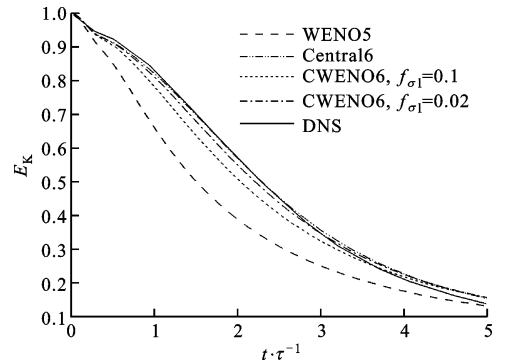


图 5 E_K 变化曲线

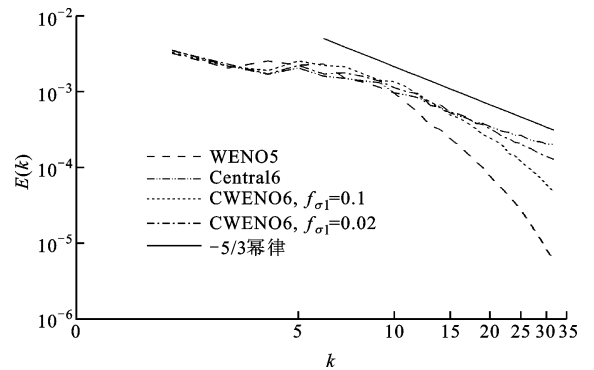


图 6 三维能谱曲线

4 结 论

(1)通过引入当地压力梯度感受因子来计算附加耗散项加权函数,并通过为该函数设置上下界限 $f_{\sigma u}$ 和 $f_{\sigma 1}$ 发展出了数值耗散可自适应控制的中心-WENO混合格式。采用 Fourier 法对 5 阶 WENO 格式、 $\sigma=0.1$ 的中心-WENO 混合格式和 6 阶中心格式的精度进行理论分析,结果表明,中心-WENO 混合格式相比于 5 阶 WENO 格式具有更小的耗散误差,在引入光滑指示器后,其频散误差亦小于 5 阶 WENO 格式。对一维激波/密度脉动干涉问题的模

拟结果表明,中心-WENO 混合格式对流场间断及物理脉动均具有较高分辨率。

(2)分别使用 5 阶 WENO 格式, $f_{ai}=0.1$ 和 $f_{ai}=0.02$ 的中心-WENO 混合格式以及 6 阶中心格式对初始 $Ma_i=0.4$ 的可压缩各向同性湍流展开 LES,结果显示,以 $f_{ai}=0.02$ 的中心-WENO 混合格式得到的 Ma_i 及 E_k 随时间变化的曲线与文献中 DNS 结果符合较好,计算时成功捕捉到 $-5/3$ 幂律能谱曲线,表明该格式可适用于较高马赫数下的可压缩湍流 LES,其为进一步开展流体机械内部复杂可压缩流动 LES 研究奠定了基础。

参考文献:

- [1] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO Schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 126(1): 202-228.
- [2] MARTIN M P, TAYLOR E M, WU M, et al. A bandwidth-optimized WENO scheme for the effective direct numerical simulation of compressible turbulence [J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 220(1): 270-289.
- [3] KIM D, KWON J H. A high-order accurate hybrid scheme using a central flux scheme and a WENO scheme for compressible flowfield analysis [J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 210(2): 554-583.
- [4] BERMEJO-MORENO I, BODART J, LARSSON J, et al. Solving the compressible Navier-Stokes equations on up to 1.97 million cores and 4.1 trillion grid points [C]// *Proceedings of the International Conference on High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*. New York, USA: ACM, 2013: 1-10.
- [5] SAMTANEY R, PULLIN D I, KOSOVIC B. Direct numerical simulation of decaying compressible turbulence and shocklet statistics [J]. *Physics of Fluids*, 2001, 13(5): 1415-1430.
- [6] 李新亮,傅德薰,马延文. 可压缩均匀各向同性湍流的直接数值模拟 [J]. *中国科学: A 辑*, 2002, 32(8): 716-724.
LI Xinliang, FU Dexun, MA Yanwen. Direct numerical simulation of compressible homogeneous isotropic turbulence [J]. *Science in China: Series A*, 2002, 32(8): 716-724.
- [7] 李虎,张树海. 可压缩各向同性衰减湍流直接数值模拟研究 [J]. *力学学报*, 2012, 44(4): 673-686.
LI Hu, ZHANG Shuhai. Direct numerical simulation of compressible isotropic decaying turbulence [J]. *Chi-*

nese *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(4): 673-686.

- [8] ERLEBACHER G, HUSSAINI M Y, SPEZIALE C G, et al. Toward the large-eddy simulation of compressible turbulent flows [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1992, 238: 155-185.
- [9] KOTOV D V, YEE H C, WRAY A A, et al. Numerical dissipation control in high order shock-capturing schemes for LES of low speed flows [J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 307(1): 189-202.
- [10] 张楚华, 琚亚平. 流体机械内流理论与计算 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2016: 131-132.
- [11] NICOUUD F, DUCROS F. Subgrid-scale stress modeling based on the square of the velocity gradient tensor [J]. *Flow, Turbulence and Combustion*, 1999, 62(3): 183-200.
- [12] LIOU M S. A sequel to AUSM: part II AUSM+-up for all speeds [J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 214(1): 137-170.
- [13] JAMESON A, SCHMIDT W, TURKEL E. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes: 81-1259 [R]. Reston, VA, USA: AIAA, 1981.
- [14] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 77(2): 439-471.

[本刊相关文献链接]

- 王宁宁, 刘海湖, 张楚华. 液桥重开过程的两相格子 Boltzmann 模型及计算. 2016, 50(9): 55-60. [doi:10.7652/xjtuxb201609009]
- 詹飞龙, 张楚华. 对流扩散方程的拟谱格式稳定性分析及扩稳方法. 2012, 46(3): 113-118. [doi:10.7652/xjtuxb201203020]
- 李典, 刘小民, 杨罗娜. 仿鸭翼的三维仿生翼型叶片气动特性研究. 2016, 50(9): 111-118. [doi:10.7652/xjtuxb201609018]
- 周晓斯, 王元, 李志强. 近床面风沙流的颗粒拟流体大涡模拟分析. 2014, 48(1): 60-66. [doi:10.7652/xjtuxb201401011]
- 周晓斯, 王元, 李志强. 小尺度新月形沙丘背风侧流场特性的大涡模拟分析. 2013, 47(7): 114-119. [doi:10.7652/xjtuxb201307021]
- 申仲旸, 谢永慧, 张荻. 布置球窝的 U 型冷却通道传热性能研究. 2013, 47(3): 108-113. [doi:10.7652/xjtuxb201303020]
- 张荻, 樊涛, 蓝吉兵, 等. 涡旋射流控制逆压梯度平板边界层分离的涡结构研究. 2012, 46(1): 1-8. [doi:10.7652/xjtuxb201201001]

(编辑 苗凌)